模块一 同角三角函数关系与诱导公式

第 1 节 三角函数的定义（★☆）

强化训练

1．（2022・宁夏模拟・★）已知角 θ 的终边上有一点 $P(-4a,3a)(a>0)$，则 $2\sin\theta+\cos\theta=$（　　）

（A）$-\frac{2}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$　　（C）$-\frac{2}{5}$或$\frac{2}{5}$　　（D）不确定

答案：B

解析：先由三角函数定义求出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，由题意，$|OP|=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|=5a$，

所以 $\sin\theta=\frac{3a}{|OP|}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{-4a}{|OP|}=-\frac{4}{5}$，故 $2\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{5}$.

2．（2022・安徽模拟・★）已知角 α 终边上一点 $P(m,4)(m\neq 0)$，且 $\cos\alpha=\frac{m}{5}$，则 $\tan\alpha=$______.

答案：$\pm\frac{4}{3}$

解析：根据点 P 的坐标，求出 $\cos\alpha$，建立方程解 m，再求 $\tan\alpha$，

由题意，$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+16}}=\frac{m}{5}$，解得：$m=\pm 3$，所以 $\tan\alpha=\frac{4}{m}=\pm\frac{4}{3}$.

3．（★）已知 $\tan\alpha=k$，且 α 在第三象限，则 $\sin\alpha=$______.（用 k 表示）

答案：$-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

解析：要求 $\sin\alpha$，可考虑在 α 的终边上求一个点，用三角函数定义算 $\sin\alpha$，

因为 α 在第三象限，不妨设 $P(-1,y_0)$，则 $\tan\alpha=\frac{y_0}{-1}=k$，所以 $y_0=-k$，故 $P(-1,-k)$，

由三角函数定义，$\sin\alpha=\frac{y_0}{|OP|}=\frac{-k}{\sqrt{(-1)^2+(-k)^2}}=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

4．（2022・潍坊二模・★★）已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，点 $A(x_1,2)$，$B(x_2,4)$ 在 α 的终边上，且 $x_1-x_2=1$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）2　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）$-\frac{1}{2}$

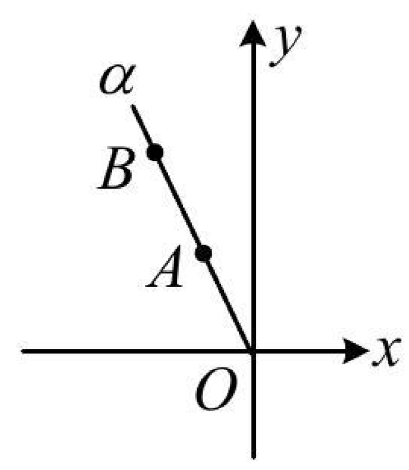
答案：C

解法 1：只要求出 x_1 或 x_2，就可以用三角函数定义求得 $\tan\alpha$，已知条件中已经有 $x_1-x_2=1$ 这一个方程了，可用 A、B 的坐标把 $\tan\alpha$ 表示出来，再建立一个 x_1 和 x_2 的方程，求解 x_1 或 x_2，

由题意，$\tan\alpha=\dfrac{2}{x_1}$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{x_2}$，所以$\dfrac{2}{x_1}=\dfrac{4}{x_2}$，故$x_2=2x_1$，代入$x_1-x_2=1$可得$x_1=-1$，故$\tan\alpha=\dfrac{2}{x_1}=-2$.

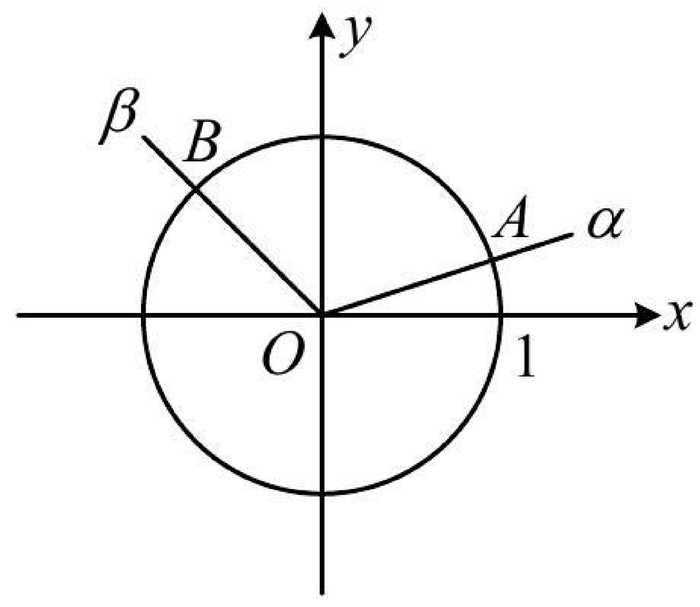
解法 2：题干给出 A、B 两点的坐标，以及$x_1-x_2=1$，想到两点连线的斜率公式，于是先画图看看，

如图，由图可知$\tan\alpha$等于直线AB的斜率，所以$\tan\alpha=\dfrac{2-4}{x_1-x_2}=\dfrac{-2}{x_1-x_2}$，又$x_1-x_2=1$，所以$\tan\alpha=-2$.



5.（2022 • 湛江期末 • ★★★）如图，角α的始边与x轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点$A(x_1,y_1)$，角$\beta=\alpha+\dfrac{2\pi}{3}$的始边与角$\alpha$的始边重合，且终边与单位圆交于点$B(x_2,y_2)$，记$f(\alpha)=y_1-y_2$，若$\alpha$为锐角，则$f(\alpha)$的取值范围是（　　）

（A）$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$　　（B）$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$　　（C）$(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$　　（D）$(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$



答案：D

解析：给出角的终边与单位圆的交点坐标，想到用三角函数的定义把$\sin\alpha$，$\sin\beta$都表示出来，

由三角函数定义，$\sin\alpha=y_1$，$\sin\beta=\sin(\alpha+\dfrac{2\pi}{3})=y_2$，

所以$f(\alpha)=y_1-y_2=\sin\alpha-\sin(\alpha+\dfrac{2\pi}{3})=\sin\alpha-(\sin\alpha\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\alpha\sin\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{3}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sqrt{3}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})$，

因为α为锐角，所以$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，从而$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，故$-\dfrac{1}{2}<\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$f(\alpha)\in(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$.

6.（2021 • 北京卷 • ★★★）若点$A(\cos\theta,\sin\theta)$关于y轴的对称点为$B(\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6}),\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6}))$，写出$\theta$的一个取值为______.

答案：$\dfrac{5\pi}{12}$（答案不唯一，详见解析）

解法 1：由三角函数定义，A，B 两点分别是θ和$\theta+\dfrac{\pi}{6}$的终边与单位圆的交点，

由于只需填一个值，所以不妨直接画图看，

如图 1，当θ与$\theta+\dfrac{\pi}{6}$互补时，它们的终边就关于 y 轴对称，所以令$\theta+(\theta+\dfrac{\pi}{6})=\pi$，解得：$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$.

解法 2：由三角函数定义，A，B 两点分别是θ和$\theta+\dfrac{\pi}{6}$的终边与单位圆的交点，

接下来我们也给一个完备的寻找θ与$\theta+\dfrac{\pi}{6}$的关系的方法，先画图看看这两个角可能的位置，

因为A，B 两点关于 y 轴对称，所以θ和$\theta+\dfrac{\pi}{6}$的终边也关于 y 轴对称，

如图 1 和图 2，在$[0,2\pi)$这个范围内，θ可取$\dfrac{5\pi}{12}$或$\dfrac{17\pi}{12}$，

在这两个值上加2π的整数倍，不改变终边的位置，所以$\theta=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi$或$\dfrac{17\pi}{12}+2k\pi$，

注意到$\dfrac{17\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}+\pi$，所以这两种结果也可以统一写成$\theta=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

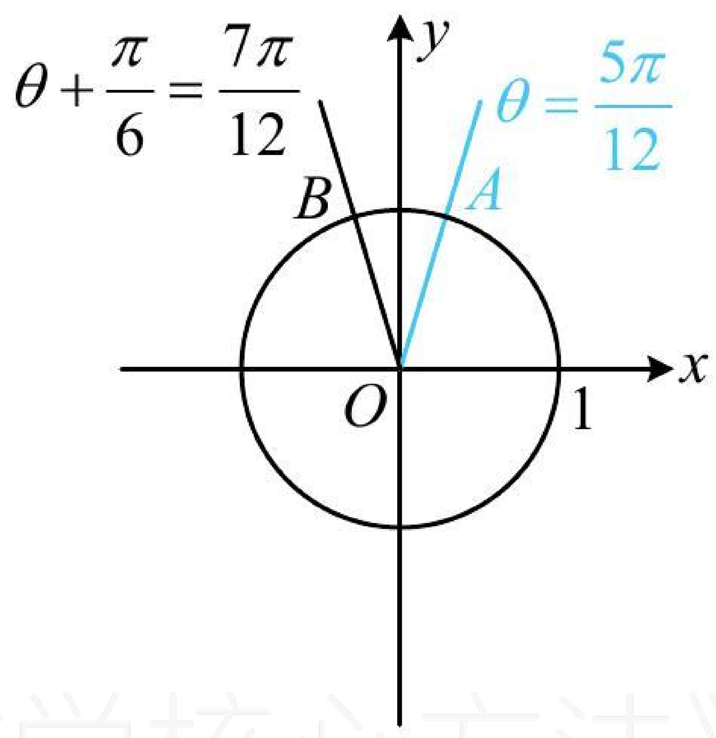


图1

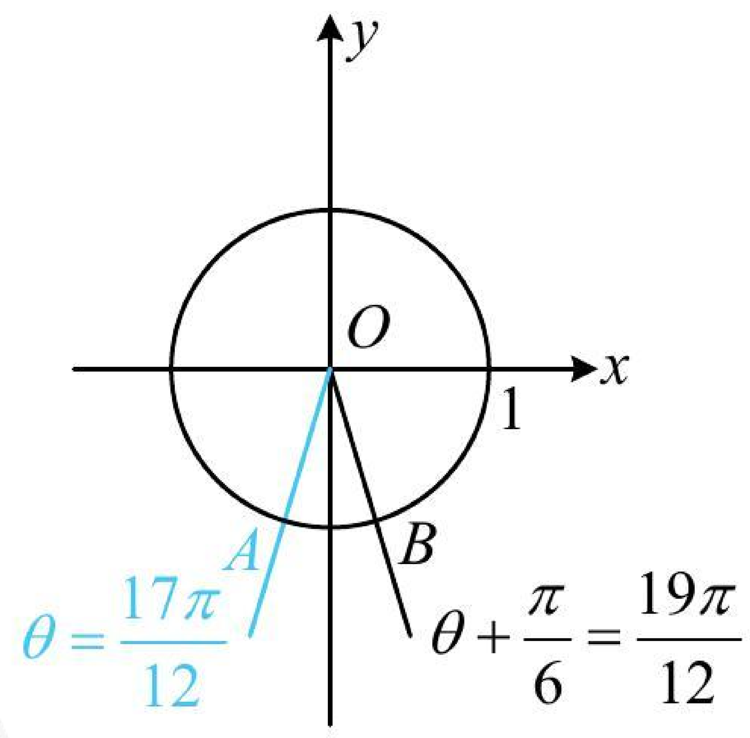


图2

7.（2022 • • ★★★）已知角α的始边与 x 轴非负半轴重合，终边上一点$P(\sin 3,\cos 3)$，若$0\le\alpha\le 2\pi$，则$\alpha=$（　　）

（A）3　　（B）$\dfrac{\pi}{2}-3$　　（C）$\dfrac{5\pi}{2}-3$　　（D）$3-\dfrac{\pi}{2}$

答案：C

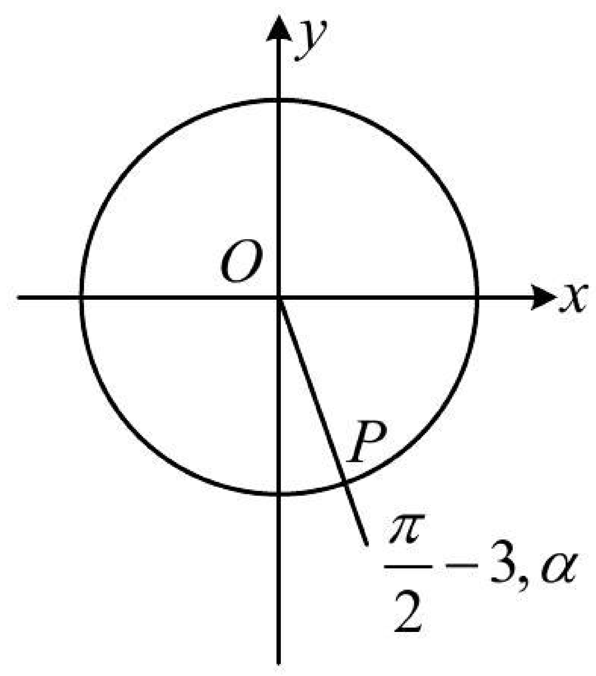
解析：给出终边上一点，先把三角函数的定义式写出来，

因为$\sin^2 3+\cos^2 3=1$，所以点 P 在单位圆上，故$\begin{cases}\cos\alpha=\sin 3\\ \sin\alpha=\cos 3\end{cases}$，

接下来把右侧的函数名化为和左侧一致，就可以找到α的终边，再化到$[0,2\pi]$上即可选答案，

因为$\sin 3=\cos(\dfrac{\pi}{2}-3)$，$\cos 3=\sin(\dfrac{\pi}{2}-3)$，所以$\begin{cases}\cos\alpha=\cos(\dfrac{\pi}{2}-3)\\ \sin\alpha=\sin(\dfrac{\pi}{2}-3)\end{cases}$，故$\alpha$与$\dfrac{\pi}{2}-3$有相同的终边，如图，

所以$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-3+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为$0\le\alpha\le 2\pi$，所以$k=1$，$\alpha=\dfrac{5\pi}{2}-3$.


y
O
x
P
$\frac{\pi}{2}-3, \alpha$